



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Θέμα 1°

A. α) Για κάθε τόξο a να αποδείξετε ότι:

$$\sin 2a = \sin^2 a - \eta\mu^2 a \equiv 2\sin^2 a - 1$$

Μονάδες 6

β) Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

Μονάδες 7

B. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.
2. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι n βαθμού ($n \in \mathbb{N}^*$) τότε το $P^2(x)$ είναι $2n$ βαθμού.
3. Η εξίσωση $\sin x = a$ έχει λύση για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
6. Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $e^{\ln x} = x$.
7. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\ln x^2 = 2 \ln x$.
8. Για κάθε $x > 1$ ισχύει: $\ln x < 0$.

Μονάδες 12

Θέμα 2°

Δίνεται ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 4 \text{ όπου } a, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει παράγοντες τους $x + 1$, $x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$a = -3 \text{ και } \beta = 0$$

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0$$

Μονάδες 8

γ) Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$.

Να βρείτε

i) Τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 3

ii) Τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Θέμα 3°

Έστω η αριθμητική πρόοδος (a_n) με πρώτο όρο $a_1 = \sigma\upsilon\nu 2x$ και διαφορά $\omega = \eta\mu 2x$, όπου $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 + a_2}{1 - 2a_4 + a_8} = \sigma\phi x$.

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10\sigma\upsilon\nu 2x + 45\eta\mu 2x$$

Μονάδες 7

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = -10 + 55\eta\mu 2x$$

Μονάδες 9

Θέμα 4°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 3

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x) = \ln 7 + f(x)$$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί

όροι Αριθμητικής πρόοδου αν και μόνο αν: $(e^\beta - 2)^2 = (e^\alpha - 2)(e^\gamma - 2)$

Μονάδες 7

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{f(1)} + e^{f(2)} + \dots + e^{f(100)} = \frac{e^{101} - 201e + 200}{e - 1}$$

Μονάδες 8