



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 83  
 B. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 41  
 Γ. 1 → Σωστό 2 → Σωστό 3 → Λάθος  
 4 → Λάθος 5 → Λάθος.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

- i) Έστω ότι η (1) δεν παριστάνει ευθεία, τότε θα υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$ , τέτοιο ώστε:
- $$\begin{cases} 2\alpha + 1 = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

Άτοπο, διότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- ii) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M, επαληθεύουν την (1).  
 Πράγματι  $(2\alpha + 1)(-1) + (\alpha - 1)2 + 3 = -2\alpha - 1 + 2\alpha - 2 + 3 = 0$ ,  
 άρα οι ευθείες της μορφής (1), διέρχονται από το M(-1,2).

- iii) Για  $\alpha = 0$ , προκύπτει η ευθεία με εξίσωση  $x - y + 3 = 0$ .

Το σύστημα  $\begin{cases} x + 5y - 3 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$  έχει λύση  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ , άρα A(-2,1).

Για  $\alpha = -1$ , προκύπτει η ευθεία με εξίσωση  $-x - 2y + 3 = 0$ .

Το σύστημα  $\begin{cases} x + 5y - 3 = 0 \\ -x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$  έχει λύση  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ , άρα B(3,0).

$\vec{AB} = (5, -1)$  και  $\vec{AM} = (1, 1)$ , άρα

$$(AMB) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AM}, \vec{AB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \text{ τ.μ.}$$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

i) Για  $\lambda=1$  η (1) γίνεται:  $C_1: y^2 = 6x$ , εξίσωση παραβολής με  $p=3$ ,  
διευθετούσα  $\delta: x = -\frac{3}{2}$  και εστία  $E(\frac{3}{2}, 0)$ .

ii) Για  $\lambda=2$  η (1) γίνεται:  $C_2: x^2 + y^2 = 16$ , εξίσωση κύκλου με  
κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $R=4$ .

iii) Η έλλειψη έχει τις εστίες της στον άξονα των  $x$ , και αφού η μία  
είναι  $E(3/2, 0)$  είναι  $\gamma=3/2$ . Ακόμη  $2a=4$  άρα  $a=2$ . Επομένως:  
 $b^2 = a^2 - \gamma^2 = 7/4$ . Άρα η ζητούμενη έλλειψη έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7/4} = 1$$

Η εκκεντρότητα  $\varepsilon$  είναι:  $\varepsilon = \gamma/a = 3/4$ .

iv) Λύνουμε το σύστημα των  $C_1, C_2$ . Με απαλοιφή του  $y$  προκύπτει  
η εξίσωση:  $x^2 + 6x - 16 = 0$  η οποία έχει λύσεις  $x=2$  &  $x=-8$  που  
απορρίπτεται γιατί η παραβολή έχει  $p=3 > 0$ . Επομένως:  
 $y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$ . Άρα τα σημεία τομής είναι:  $P_1(2, 2\sqrt{3})$  και  
 $P_2(2, -2\sqrt{3})$ .

Από τον ορισμό της παραβολής  $d(P_1, \delta) = (P_1, E)$  και  
 $d(P_2, \delta) = (P_2, E)$  αφού τα  $P_1, P_2$  είναι σημεία της παραβολής.  
Επομένως ισχύει ότι:  $d(P_1, \delta) - (P_1, E) = d(P_2, \delta) - (P_2, E)$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Α α. Αν  $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$  τότε  $\varphi = 0$ , άτοπο αφού  $\varphi = \pi/3$ .

$$\beta. A = -2|\vec{\alpha}|, B = -|\vec{\beta}|, \Gamma = \vec{\alpha}\vec{\beta}.$$

Η (1) παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ .

$$\text{Πράγματι: } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 > 0$$

αφού το  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0$  δίνει  $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$  και απορρίπτεται.

$$\text{Άρα } \rho = \frac{\sqrt{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2}}{2} = \frac{1}{2} |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

Β. α. Είναι  $K \left( \vec{\alpha}, \frac{\vec{\beta}}{2} \right) = (1, 1)$ , άρα  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$

Επομένως  $\rho^2 = \frac{\vec{\alpha}^2 + \frac{\vec{\beta}^2}{4} - 4 \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\beta}}{2} \cdot \cos \phi}{4} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

β.  $d(K, \varepsilon) = \frac{|3+4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 = \rho$ . Άρα ο κύκλος με εξίσωση την (1)

εφάπτεται στην ευθεία:  $3x+4y-12=0$ .

γ.

Αν  $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$ , τότε υπάρχει  $\lambda$ , ώστε  $\vec{V} = \lambda \vec{\alpha}$ , αφού  $\vec{V} \parallel \vec{\alpha}$ .

Ακόμα:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{V} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Άρα  $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{\alpha}$ .