

# ΑΛΓΕΒΡΑ

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΘΕΜΑ 1ο.

α) i) Να αποδειχτούν οι τύποι

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $22,5^\circ$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) i) Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Αν  $\alpha_n, \beta_n, n \in \mathbb{N}^*$  είναι μια αριθμητική και μία γεωμετρική πρόοδος με διαφορά  $\omega$  και λόγο  $\lambda$  αντίστοιχα, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $\alpha_{v+1}$	1. $\frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$
β) $\beta_{v+1}$	2. $\alpha_1 + (v-1)\omega$
γ) $\alpha_v$	3. $\beta_1 \lambda^v$
δ) $\beta_v$	4. $\alpha_v + \omega$
ε) $S_v$	5. $\frac{\beta_{v+1}}{\lambda}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

δ) Να χαρακτηρήσετε σαν Σωστό(Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις i έως v:

i  $\ln e = 1$

ii  $\log_e = \frac{1}{\ln 10}$

iii  $\ln 0 = 1$

iv  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$  με  $x > 0$

v  $a^x > 0$  με  $a > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + x + 2, \quad Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + 1 \quad \text{και}$$

$$F(x) = x^3 + (2\beta + \gamma)x^2 - 10x + 4\beta,$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $x \in \mathbb{R}$ .

Το  $P(x)$  έχει ρίζα το  $-1$ , το υπόλοιπο της διαίρεσης  $Q(x):(x-2)$  είναι 15 και η αριθμητική τιμή του  $F(x)$  για  $x=1$  είναι 6.

α) Ν' αποδείξετε ότι  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$ , και  $\gamma=3$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β) Να λύσετε:

i) την εξίσωση  $P(x) = Q(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) την ανίσωση  $P(x) < F(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iii) την εξίσωση  $2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 1 = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

**ΘΕΜΑ 3ο.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(0) = f(1) = 0$  και τύπο

$$f(x) = \log(1 + e^x) - \alpha - \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) N' αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

iii) N' αποδείξετε ότι  $f(x) = \log \left[ \frac{1 + e^x}{(1 + e)^x} \cdot 2^{x-1} \right]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iv) Να λύσετε την ανίσωση  $\log \left[ (1 + e^x) \cdot 2^{x-1} \right] - f(x) \leq x$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

**ΘΕΜΑ 4ο.**

Η ποσότητα μιας τοξικής ουσίας  $T$  στα νερά μιας λίμνης ανέρχεται σε 3 μονάδες και αρχίζει να αυξάνεται με την έναρξη της λειτουργίας μιας παραλίμνιας βιομηχανίας κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

A. i) Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας  $T$  θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας  $T$  που διοχετεύεται από την βιομηχανία στην λίμνη κάθε ημέρα, αδρονοποιείται κατά την διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της 82ης ημέρας;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**B.** Ο πληθυσμός  $A=100$  χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1% ημερησίως. Έστω  $\beta_n$  ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά την διάρκεια της  $n$ -οστής ημέρας.

i) Ν' αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\beta_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  είναι γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο:

$$\beta_n = 0,01 \cdot A \cdot (0,99)^{n-1} \text{ χιλιάδες}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ii) Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από  $n=5$  ημέρες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**ΘΕΜΑ 4ο. ( 2η παραλλαγή)**

Μια παραλίμνια βιομηχανία διοχέτευσε την πρώτη ημέρα της λειτουργίας της ποσότητα 3 μονάδων μιας τοξικής ουσίας T στα νερά της λίμνης και στη συνέχεια αυξάνει την ποσότητα που διοχετεύει κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

- A. i) Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας T θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων.

(δίνεται  $29929 = 173^2$  ή  $7482,25 = 86,5^2$ ).

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- ii) Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας T που διοχετεύεται από τη βιομηχανία στη λίμνη κάθε ημέρα, αδρονοποιείται κατά τη διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της 81ης ημέρας;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- B. Ο πληθυσμός  $A=100$  χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1% ημερησίως. Έστω  $\beta_n$  ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά την διάρκεια της  $n$ -οστής ημέρας.

- i) N' αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\beta_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε το γενικό όρο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

- ii) Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από  $n=5$  ημέρες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4