Απαντήσεις Θεμάτων.
Μαθηματικών και Στοιχεία Στατιστικής.

Θέμα Α.

Α1. Σχολ. βιβλίο Σελ. 93.
Α2. Σχολ. βιβλίο Σελ. 86-87.
Α3. Σχολ. βιβλίο Σελ. 140.
Α4.

α) Σ
β) Λ.
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

Θέμα Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2\sqrt{x^2-x+1}-2)(2\sqrt{x^2-x+1}+2)}{(x-1)(2\sqrt{x^2-x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2\sqrt{x^2-x+1})^2-2^2}{(x-1)(2\sqrt{x^2-x+1}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-x+1)-4}{(x-1)(2\sqrt{x^2-x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4x+\cancel{4}-\cancel{4}}{(x-1)(2\sqrt{x^2-x+1}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4x}{(x-1)2(\sqrt{x^2-x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{4\cdot 1}{2(\sqrt{1+1-1}+1)} = \frac{4}{4} = 1.$$

Β2. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι για την f(x) η παράγωγος της στο σημείο x_0.

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)' = \frac{2}{2\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(x^2-x+1)' - 0$$

$$= \frac{2\cdot(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$. Άρα για $x_0=0$ η παράγωγος θα κάνει $f'(0)=\frac{2(2\cdot 0-1)}{2\sqrt{0^2-0+1}} = \frac{-2}{2} = -1$.

Β3. Απο τη θεωρία ότι η κλίση της εφαπτομένης ($εφω = λ = f'(x_0)$) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης και ίσος με την παράγωγο.

Άρα $εφω = f'(0) \Rightarrow εφω = -1 \Rightarrow ω = π - \frac{π}{4} = \frac{3π}{4}$.

Θέμα Γ.

Γ1. Εστω c το πλατος της καθε κλασης.

Απο τον πίνακα εχω ότι.. οι κλάσεις είναι μαζί με το κ.Β. αντίστοιχα:

$[0 - y_1)$ ....

$[y_1 - y_2)$ ..6.

$[y_2 - y_3)$ ....

$[y_3 - y_4)$ ....

$[y_4 - y_5)$ ....

Άρα $c = y_1 - 0 \Rightarrow c = y_1$.

$6 = \frac{y_2+y_1}{2} \Rightarrow y_2+y_1 = 12$.

$c = y_2 - y_1 \Rightarrow 2c = y_2 - y_1$.

Οπότε
$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= c \\ y_2 + y_1 &= 12 \\ y_1 &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &y_2 = c + c \Rightarrow y_2 = 2c \\ &2c + c = 12 \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 3. \end{aligned}$$

Γ2.

Απ.Βαρους	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 v_i$
[0 - 4)	2	20	40	80
[4 - 8)	6	40	240	1440
[8 - 12)	10	45	450	4500
[12 - 16)	14	30	420	5880
[16 - 20	18	25	450	8100
ΣΥΝΟΛΟ.		160.	1600	20.000

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{N} = \frac{1600}{160} = 10 \text{ κιλά /άτομο.}$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i v_i\right)^2}{N}\right) = \frac{1}{1600}\left(20.000 - \frac{(1600)^2}{160}\right)$$

$$= \frac{1}{160}\left(20000 - \frac{2560000}{160}\right) = \frac{4000}{160} = 25 \text{ (κιλα /ατομο)}^2$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{25} \text{ κιλα/ατομο} = 5 \text{ κιλά /ατομο.}$$

Γ3

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{5}{10} \cdot 100\% = 50\%$$

οχι το δειγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4 Ξέρουμε απο τη Θεωρία ότι σε ομαδοποιημένα δεδομένα οι παρατηρησεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημενες μέσα στο πλάτος της καθε κλάσης.
Άρα το ποσοστό του μηκους θα αντιστοιχεί σε ίδιο ποσοστό παρατηρήσεων σε καθε κλάση.
Θέλω τη πιθανότητα απο 7 ⟶ 14 κιλά.

Άρα 7 — 8 = 1/4 κλάσης Άρα 1/4 · 40 = 10 παρατ.
8 — 12 = όλη η κλάση Άρα 45 παρατ.
12 — 14 = 1/2 της κλάσης Άρα 1/2 · 30 = 15 παρατ.

P(απωλεια βαρους απο 7 εως 14 κιλά) =

$$= \frac{10+45+15}{160} = \frac{7\cancel{0}}{16\cancel{0}} = 0{,}4375.$$

Θέμα Δ.

$$f(x) = \ln(x-P(A)) - \frac{1}{2}(x-P(A))^2 + P(B) \quad , x > P(A).$$

Δ1.

$$f'(x) = [\ln(x-P(A))]' - \frac{1}{2}[(x-P(A))^2]' + [P(B)]' =$$

$$= \frac{1}{x-P(A)} \cdot (x-P(A))' - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-P(A)) \cdot (x-P(A))' + 0$$

$$= \frac{1}{x-P(A)} - \frac{x-P(A)}{1} = \frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} =$$

$$= \frac{-x^2+2xP(A)+1-P(A)^2}{x-P(A)}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (2P(A))^2 - 4 \cdot (-1)(1-P(A))^2 = 4$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \begin{cases} 1+P(A) \\ P(A)-1 \quad \text{Απορ.} \end{cases}$$

	P(A)		1+P(A)	
f'		+	0	—
f		↗	T.M	↘

Άρα η F(x) γν. αύξουσα στο (P(A), 1+P(A)]

γν. φθίνουσα στο (1+P(A), +∞).

· και για $x_0 = 1+P(A)$ έχω ΤΜ

$$f(1+P(A)) = \ln(1+P(A)-P(A)) - \frac{1}{2}(1+P(A)-P(A))^2 + P(B) =$$

$$= \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + P(B) = -\frac{1}{2} + P(B).$$

Δ2. Πρέπει να ισχύει ότι.

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{3} = 1+P(A) \Rightarrow \frac{5}{3} - 1 = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \\ f'(x_0) = 0 \Rightarrow P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Δ3. P(να μην πραγματοποιηθούν ταυτοχρονα τα A, B) =
$= P\left((A\cap B)'\right) = 1 - P(A\cap B)$.

Εχω ότι $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{3}$.

Οπότε $P\left((A\cap B)'\right) = 1 - P(A\cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Δ4. P(να πραγματοποιηθεί μόνο ένα απο τα A, B) =

= P(μόνο το A ή μόνο το B) $= P(A-B \cup B-A) =$

$= P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$
$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.