



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

Γ. 1 - (Λάθος) - 2 (Σωστό) - 3 (Λάθος) 4 (Λάθος) διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιος ώστε } f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \text{ διότι } \alpha < \beta \text{ και } f(\alpha) < f(\beta)$$

5 (Λάθος) διότι: αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$

Θέμα 2^ο

α) Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = -\infty$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

γ) Για κάθε $x > 0$, $f''(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f(e^2) = 2e(\ln e^2 - 2) = 0$$

$M(e^2, 0)$ το σημείο καμπής

$$\begin{aligned} \delta) E &= \int_{1/e}^{e^2} \left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_{1/e}^1 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[-2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_{1/e}^1 + \left[2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_1^{e^2} = \\ &= -2(-2) + \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\ln \frac{1}{e} - 2 \right) + 2e \cdot (\ln e^2 - 2) - 2(-2) \\ &= 8 + \frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2) + 2e(2-2) = 8 - \frac{6}{\sqrt{e}} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο

$$\alpha) \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow e^x > x-1 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

Έστω $f(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbf{R}$. Τότε $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)			+
F(x)		2	

Η f για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$ δηλαδή

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \beta) w &= \left[e^x + (x-1)i \right]^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + 2i(x-1) \cdot e^x - (x-1)^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + e^x - (x-1)^2 + i \left[2(x-1)e^x + x+1 \right] \end{aligned}$$

Έστω $g(x) = 2(x-1)e^x + x+1, x \in [0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0) = -2 + 1 = -1$
 $g(1) = 1 + 1 = 2$ Άρα $g(0) \cdot g(1) < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $0 = W$ να είναι πραγματικός.

γ) $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση

$h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$ έχει ελάχιστο.

$h'(x) = 2e^{2x} + 2(x-1)$. Προφανής λύση είναι η $x=0$ διότι

$h'(0) = 2 - 2 = 0$. Είναι $h''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0$. Άρα η $h'(x) \uparrow$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
H(x)	↘	min	↗

Για κάθε $x < 0$ ισχύει $h'(x) < h'(0) = 0$ και για κάθε $x > 0$

ισχύει $h'(x) > h'(0) = 0$. Επομένως η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο $x=0$.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z = e^0 + (0-1)i = 1 - i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 4^ο

α) $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x$

$$\left[e^x \cdot f(x) + f(x) \right]' = (\sigma\upsilon\nu x)'$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$e^x \cdot f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c, x \in \mathbf{R}$$

$$(e^x + 1) \cdot f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c.$$

Για $x=0$ είναι $2f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}, x \in \mathbf{R}$

Έχουμε $f(x) + f(-x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}} = \dots = \sigma\upsilon\nu x$ (1)

β) $-\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e^x}, x \in \mathbf{R}$ διότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx$$
 (2)

Στο $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx$ θέτουμε $x = -u$ οπότε $dx = -du$.

Για $x = -\pi/2$ είναι $u = \pi/2$ και για $x = \pi/2$ είναι $u = -\pi/2$

$$\text{Άρα } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) du = - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u) du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u) du.$$

Η (2) γράφεται:

$$I + I = [\eta\mu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Leftrightarrow 2I = \eta\mu\pi/2 - \eta\mu(-\pi/2) = 1 + 1 = 2$$

Επομένως $I = 1$.

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = \frac{-\eta\mu x \cdot (1+e^x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\eta\mu x \cdot (1+e^x) + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(1+e^x)^2} < 0$$

για κάθε $x \in [0, \pi/2]$ Άρα $f \downarrow$ στο $[0, \pi/2]$ οπότε $f(0) = \frac{1}{2}$ η μέγιστη

τιμή και $f(\pi/2) = 0$ η ελάχιστη.

Ισχύει $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ απ' όπου προκύπτει ότι $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.