Απαντήσεις Θετικής-Τεχνολογικής.

Θέμα Α.

A1 Αποδ. Θεώρημα σελ. 260

A2 Ορισμός. σελ. 280

A3
α Σ
β Σ
γ Λ
δ Λ
ε Σ

Θέμα Β.

Ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$|z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$ (i)

$|z|^2=z\cdot\bar{z}$ ii

και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $|x|\le k \Rightarrow -k\le x\le k$

B1.

$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Rightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \xRightarrow{(i)}$

$2|z-3i|=2 \Rightarrow |z-3i|=1$. Παριστάνει κύκλο $K(0,3)$ $R=1$.

B2.

$|z-3i|=1 \Rightarrow |z-3i|^2=1 \xRightarrow{(ii)} (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Rightarrow$

Το $z\neq 3i$ άρα το $z-3i\neq 0$

$(z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Rightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

B3.

$w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\overset{B2}{=}z-\cancel{3i}+\bar{z}+\cancel{3i}=z+\bar{z}\Rightarrow$

Έστω ότι $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow w=x+yi+x-yi \Rightarrow w=2x$. Άρα $w\in\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$

Έχουμε ότι ο $w\in\mathbb{R}$ και $|z-3i|=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+(y-3)^2=1 \\ \text{Πάντα το } (y-3)^2\geq 0\ \forall y\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} x^2\leq 1 \xRightarrow{B3}$

$\Rightarrow \left(\frac{w}{2}\right)^2\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{w}{2}\right|^2\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{w}{2}\right|\leq 1 \Rightarrow \frac{|w|}{2}\leq 1 \Rightarrow |w|\leq 2$

$\Rightarrow -2\leq w\leq 2.$ ⟨ Ο $w\in\mathbb{R}$ άρα το $|w|$ είναι απόλυτη τιμή ⟩

Β4.

Από Β3 $w=z+\bar{z} \Rightarrow w-z=z+\bar{z}-z \Rightarrow$

$\Rightarrow w-z=\bar{z} \Rightarrow |w-z|=|\bar{z}| \xRightarrow{(i)} |z-w|=|z|.$

Θέμα Γ. $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)^{(i)},\ f(0)=f'(0)=0$

Γ1.

$(i) \Rightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^x)'f'(x)+e^x(f'(x))'-(e^x)'=(x)'f'(x)+xf''(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^xf'(x))'-(e^x)'=(xf'(x))' \Rightarrow \int (e^xf'(x))\cancel{'}\cancel{dx}-\int(e^x)\cancel{'}\cancel{dx}=\int(xf'(x))\cancel{'}\cancel{dx}$

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c \\ \text{Έχουμε ότι } f'(0)=0\end{matrix}\right\} \xRightarrow{x=0} e^0f'(0)-e^0=0f'(0)+c \Rightarrow c=-1.$

Άρα:

$e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1 \Rightarrow e^xf'(x)-xf'(x)=e^x-1 \Rightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1 \Rightarrow$

$\xRightarrow{*} f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x} \Rightarrow \int f\cancel{'}(x)\cancel{dx}=\int\frac{e^x-1}{e^x-x}dx=\int\frac{(e^x-x)'}{e^x-x}dx \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+c \\ \text{Έχουμε } f(0)=0\end{matrix}\right\} \xRightarrow{x=0} f(0)=0=\ln(e^0-0)+c \Rightarrow 0=\ln 1+c \Rightarrow c=0.$

Άρα $f(x)=\ln(e^x-x)\ \forall x\in\mathbb{R}.$

* Αν ορίσω $h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$. Τότε $h'(x)=e^x-1$, $h'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0 \Rightarrow x=0.$

Άρα η μονοτονία και τα ακρότατα της $h(x)$ θα είναι

	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

$h(0)=e^0-0=1.$

Άρα $\forall x\geq 0 \xRightarrow{h\nearrow} h(x)\geq h(0) \Rightarrow h(x)\geq 1>0$

$\forall x\leq 0 \xRightarrow{h\searrow} h(x)\geq h(0) \Rightarrow h(x)\geq 1>0$

Άρα $\forall x\in\mathbb{R}$ η $h(x)=e^x-x>0$ άρα

Είναι καλώς ορισμένη η διαίρεση με το e^x-x όπως επίσης και το $\ln(e^x-x)$

Γ2.

$f(x)=\ln(e^x-x),\ x\in\mathbb{R}$. $\quad f'(x)=[\ln(e^x-x)]'=\frac{1}{e^x-x}(e^x-x)'=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

Το $e^x-x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$
f'	$-$		$+$
f	↘	ΤΕ	↗

η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα αν $x\in[0,+\infty)$
και είναι γν. φθίνουσα αν $x\in(-\infty,0]$
Για $x_0=0$ έχω Τ.Ε το $f(0)=\ln(e^0-0)=0$

Γ3.

$$f''(x)=\frac{(e^x-1)'\cdot(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$

$$=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$$

Το $(e^x-x)^2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Θεωρώ $G(x)=2e^x-xe^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. $G'(x)=2e^x-xe^x-e^x=e^x(1-x)$

$G'(x)=0\Rightarrow e^x(1-x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
G'	$+$	0	$-$
G	↗	ΤΜ	↘

$G(1)=2e^1-e^1-1=e-1>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2e^x-xe^x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(2-x)-1$

Για $x\to+\infty$ το $e^x\to+\infty$, $2-x\to-\infty$ $\Big\}$ Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-1$

Για $x\to-\infty$ το $e^x\to0$

Επι το $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x \overset{\infty\cdot0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \overset{\infty/\infty}{\underset{ΔΗ}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=-1$. Οπότε το σύνολο τιμών της $G(x)$ είναι $(-1,e-1]\cup[e-1,-\infty)$

η $G(x)=2e^x-xe^x-1$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και στο $[1,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} G(x)=-1$. Άρα θα υπάρχει $\xi_1\in(-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $G(\xi_1)<0$.

$G(1)=e-1>0$

Οπότε η $G(x)$ συνεχής στο $[\xi_1,1]$ και $G(\xi_1)\cdot G(1)<0$.

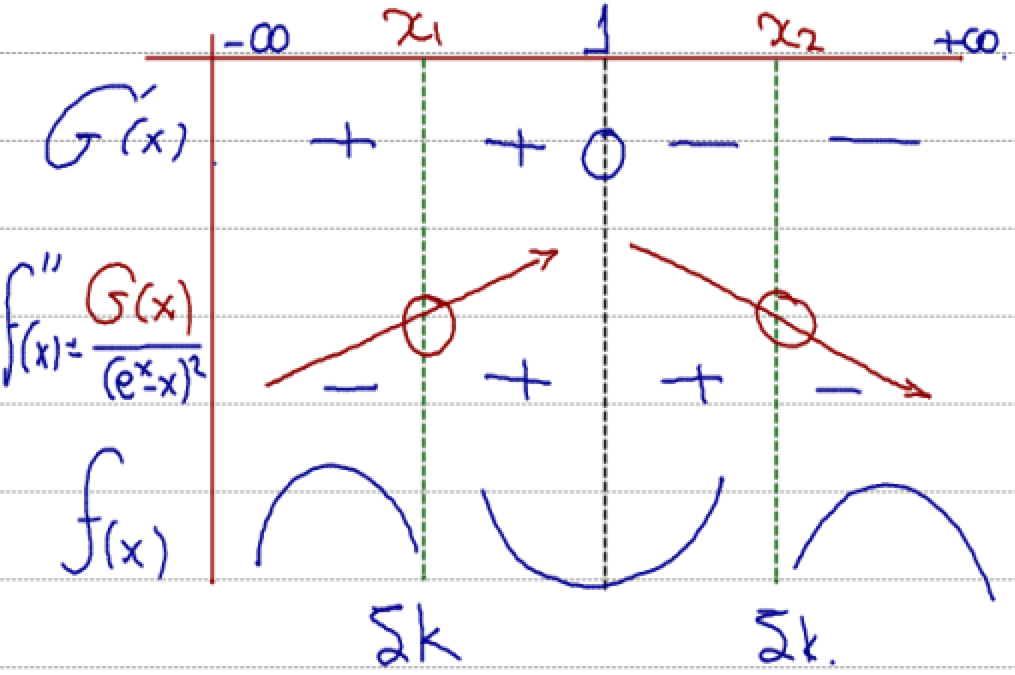
Άρα θα ισχύει το Θ. Bolzano άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1: $G(x_1)=0$

Όμοια $\lim_{x\to+\infty} G(x)=-\infty$ άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(1,+\infty)$: $G(\xi_2)<0$

$G(1)=e-1$.

Άρα η $G(x)$ συνεχής στο $[1,\xi_2]$ και $G(\xi_2)\cdot G(1)<0$ Άρα ισχύει το Θ. Bolzano άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(1,\xi_2)$: $G(x_2)=0$.

Και καθώς η $G(x)$ είναι και γν. μονότονη στα δ/τα $(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$ άρα θα είναι και 1-1 άρα οι ρίζες x_1,x_2 θα είναι μοναδικές.



Άρα η $f(x)$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στα x_1,x_2 που είναι και οι ρίζες της $G(x)$

Γ4.

Θέτω $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$. Θα εφαρμ. Θ. Bolzano

Θεωρώ την $h(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi/2]$.

Η $h(x)$ συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

και $h(0) = \ln(e^0 - 0) - \sigma\upsilon\nu 0 = \ln 1 - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 = -1 < 0$

$h(\pi/2) = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) \underset{(**)}{>} 0$ γιατί:

(**) Θεωρώ την $\varphi(x) = e^x - x$ η οποία είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

άρα $1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(1) < \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow e - 1 < e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 < e - 1 < e^{\pi/2} - \pi/2$ Άρα το $e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} > 1$ άρα $\ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Όμοια η $h(x)$ είναι γν. αύξουσα άρα η ρίζα θα είναι μοναδική.

Θέμα Δ.

Δ1. Η $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η $f(x+t)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτ. Άρα $\frac{e^{2t}}{f(x+t)}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτ.

Άρα το $\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση άρα το $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}$ θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και καθώς η e^{2x} είναι παραγωγίσιμη άρα και η $g(x)$ θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Όμοια και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συν/ση.

Στο $\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

Θέτω $x + t = u \Rightarrow t = u - x$. άρα $dt = (u-x)'du \Rightarrow dt = du$.

για $t = 0$, $u = x$

$t = -x$ $u = 0$ Άρα $\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du$

$= \frac{1}{e^{2x}}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ Οπότε

$\frac{1-f(x)}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{1}{\cancel{e^{2x}}}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Rightarrow 1 - f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du$

Οπότε $\left\{\begin{array}{ll} 1-f(x)=\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du \overset{\text{παρ/ζω}}{\Longrightarrow} -f'(x)=-\frac{e^{2x}}{g(x)} \\ 1-g(x)=\int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(x)}du \quad -g'(x)=\frac{-e^{2x}}{f(x)} \end{array}\right\}$ (iv)

$\left.\begin{array}{l} f'(x)\cdot g(x)=e^{2x} \\ g'(x)f(x)=e^{2x} \end{array}\right\}$ $f'(x)\cdot g(x)=g'(x)f(x) \Rightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0$

$\overset{g>0}{\Longrightarrow} \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c_1$ άρα $f(x)=c_1\cdot g(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du \overset{x=0}{\Longrightarrow} \frac{1-f(0)}{e^0}=\frac{1}{e^0}\cancel{\int_0^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du}^{\to 0} \Rightarrow f(0)=1$

Ομοια $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du \overset{x=0}{\Longrightarrow} g(0)=1$.

για $x=0$, $f(0)=c\cdot g(0) \Rightarrow 1=c_1\cdot 1 \Rightarrow c_1=1$. Άρα $f(x)=g(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Δ2.

$\text{iv}) \Rightarrow -f'(x)=-\frac{e^{2x}}{g(x)} \Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=e^{2x} \underset{f=g}{\Longrightarrow} f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f'(x)f(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow (f^2(x))'=(e^{2x})' \Rightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1$. $\Rightarrow f^2(x)=e^{2x} \Rightarrow$

Για $x=0$ $f(0)=1$ άρα $1^2=e^0+c_1 \Rightarrow 1=1+c_1 \Rightarrow c_1=0$

$\Rightarrow f(x)=e^x$

ή αλλά η $f(x)>0$ Άρα $f(x)=e^x \ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(x)=-e^x$

Δ.3

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f(1/x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(e^x)}{e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{1/x}}\ \underline{\underline{0/0}}$$

Για $x\to 0^-$ άρα $\frac{1}{x}\to -\infty$ άρα $e^{1/x}\to 0$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x}}{1/x}\ \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{-1/x})'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{1/x^2}\,e^{-1/x}}{-\cancel{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}-e^{-1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{e^{1/x}}=-\infty.$$

Δ.4.

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=\int_0^1\left|\int_1^x f(t^2)dt\right|dx\ \underline{\underline{*}}$$

$*\ F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$, $F'(x)=f(x^2)\cdot(x)'=f(x^2)>0$ άρα η $F(x)\nearrow$

Οπότε για $x\in[0,1]$, $0\leq x\leq 1\Rightarrow F(0)\leq F(x)\leq F(1)\Rightarrow F(x)=\int_1^x f(t^2)dt\leq F(1)=0$

Άρα η $F(x)<0$

$$=\int_0^1 -F(x)dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 x f(x^2)dx=-[1\cdot \underbrace{F(1)}_{0}-0\underbrace{F(0)}_{0}]+\frac{1}{2}\int_0^1 2xf(x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^{x^2})'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[e^1-e^0\right]=\frac{1}{2}(e-1).$$