ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο.

$P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2$, $Q(x)=\beta x^2+\gamma x+1$ και

$F(x)=x^3+(2\beta+\gamma)x^2-10x+4\beta$,

α) 'Εχουμε το σύστημα: $\{P(-1)=0,\ Q(2)=15,\ F(1)=6\}$

$\{\alpha=1,\ 4\beta+2\gamma=14,\ 6\beta+\gamma=15\}$

$\{\alpha=1,\ \beta=2,$ και $\gamma=3\}$

β) $P(x)=Q(x)\Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2=2x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-2x+1=0\Leftrightarrow 2x(x^2-1)+x^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-1,\ x=1/2$

$P(x) < F(x) \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2<x^3+7x^2-10x+8$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6<0\Leftrightarrow x<1$ ή $2<x<3$

γ) $2\eta\mu^3x-\eta\mu^2x-2\eta\mu x+1=0\Leftrightarrow \eta\mu x=1,\ \eta\mu x=-1,\ \eta\mu x=1/2$ άρα

$$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\kappa\in Z$$

ΘΕΜΑ 3ο.

$$f(x)=\log(1+e^x)-\alpha-\beta x$$

i) Επειδή $1+e^x>0$, το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

ii) Για x = 0 προκύπτει: $\alpha=\log 2$. Για x = 1: $\beta=\log\frac{1+e}{2}$

iii) Με ιδιότητες λογαρίθμων έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=\log(1+e^x)-\alpha-\beta x=\log(1+e^x)-\log 2-x\log\frac{1+e}{2}$$

$$= \log(1+e^{x}) - \log 2 - \log\left(\frac{1+e}{2}\right)^{x}$$

$$= \log\frac{1+e^{x}}{2\left(\frac{1+e}{2}\right)^{x}} = \log\left(\frac{1+e^{x}}{(1+e)^{x}}2^{x-1}\right)$$

iv) Είναι κατά σειρά:

$$\log[(1+e^{x})2^{x-1}] - f(x) \le x \Leftrightarrow \log[(1+e^{x})2^{x-1}] - \log\left(\frac{1+e^{x}}{(1+e)^{x}}2^{x-1}\right) \le x$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{(1+e^{x})2^{x-1}}{\frac{1+e^{x}}{(1+e)^{x}}2^{x-1}} \le x \Leftrightarrow \log(1+e)^{x} \le x$$

$$\Leftrightarrow x\log(1+e) - x \le 0 \Leftrightarrow x\log(\frac{1+e}{10}) \le 0 \Leftrightarrow x \ge 0$$

γιατί $\log(\frac{1+e}{10}) < 0$ αφού $\frac{1+e}{10} < 1$

ΘΕΜΑ 4ο.

α) i) Αν α_ν είναι η ποσότητα της ουσίας T που περιέχεται στην λίμνη την ν-οστή ημέρα, τότε η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι Αριθμητική Πρόοδος με $\alpha_1=3,5$, $\omega=0,5$ και $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega = 3,5+(\nu-1)\,0,5$, οπότε

$\alpha_\nu > 1863 \Leftrightarrow 3,5 + (\nu-1)\,0,5 > 1863 \Leftrightarrow \nu > 3720$

Άρα το όριο θα ξεπεραστεί την 3721η ημέρα από τη έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας.

ii) Έχουμε Αριθμητική Πρόοδο με διαφορά $\omega' = 0,5\cdot 70\%$ $= 0,35$ και $\alpha'_1=3,35$. Είναι $\alpha'_{82}=3,35+81\cdot 0,35=32$

β i)	***ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΨΑΡΙΩΝ ΚΑΤΑ (β_ν) ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΗΜΕΡΑΣ:***	***ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ (γ_ν) ΤΩΝ ΨΑΡΙΩΝ ΠΟΥ ΑΠΟΜΕΝΟΥΝ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΑΣ:***
1η ΗΜΕΡΑ	$\beta_1 = 0{,}01\cdot A$	$\gamma_1 = A - 0{,}01\cdot A = 0{,}99\cdot A$
2η ΗΜΕΡΑ	$\beta_2 = 0{,}01\ \gamma_1 = 0{,}01\cdot 0{,}99A$	$\gamma_2 = 0{,}99\cdot A - 0{,}01\cdot 0{,}99A = (0{,}99)^2A$
3η ΗΜΕΡΑ	$\beta_3 = 0{,}01\ \gamma_2 = 0{,}01\cdot(0{,}99)^2A$	$\gamma_3 = (0{,}99)^2A - 0{,}01\cdot(0{,}99)^2A = (0{,}99)^3A$
.	.	.
.	.	.
$(\nu$-$1)_\eta$-ΗΜΕΡΑ	.	.
ν_η ΗΜΕΡΑ	$\beta\nu = 0{,}01\gamma_{\nu-1} = 0{,}01\cdot(0{,}99)^{\nu-1}A$	$\gamma_{\nu-1} = (0{,}99)^{\nu-1}A$

2ος τρόπος. Για τις ακολουθίες β_ν, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και γ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ με

$\beta_1 = 0{,}01\cdot A$, $\gamma_0 = A$, είναι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ $\beta_{\nu+1} = 0{,}01\cdot\gamma_\nu$ (1)

και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$: $\gamma_\nu = \gamma_{\nu-1} - 0{,}01\cdot\gamma_{\nu-1} \Leftrightarrow \gamma_\nu = 0{,}99\cdot\gamma_{\nu-1}$

$$\Leftrightarrow 0{,}01\cdot\gamma_\nu = 0{,}01\cdot 0{,}99\cdot\gamma_{\nu-1}$$

(και από (1):) $\Leftrightarrow \beta_{\nu+1} = 0{,}99\cdot\beta_\nu$

Άρα, η β_ν, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος με λόγο $\lambda = 0{,}99$. Έτσι,

$$\beta_\nu = \beta_1\cdot\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 0{,}01\cdot A\ (0{,}99)^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 0{,}01\cdot(0{,}99)^{\nu-1}A$$

β) ii) Είναι:

$A - \beta_5 = A - 0{,}01\cdot(0{,}99)^4A = (0{,}99)^5A\ (= \gamma_5) \cong 95.099$ ψάρια.

(2η παραλλαγή)

α i) Αν α_ν είναι η ποσότητα της ουσίας που διοχετεύει η βιομηχανία στην λίμνη την ν-οστή ημέρα τότε η ακολουθία α_ν , $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι Αριθμητική Πρόοδος με $\alpha_1=3$, $\omega=0,5$. Πρέπει

$S_\nu>1863$ ή $\frac{\nu}{2}[2 \cdot 3 + (\nu - 1) \cdot 0,5] > 1863 \Leftrightarrow \nu > 81$ κ.λ.π.

α ii) $\alpha'_{82} = 2,1 + 81 \cdot 0,35 = \ldots$ κ.λ.π.