ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΕΕ

ΛΥΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

α) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2002\right)'=x^2-4x+3\ ,\ 2<x<2004$.

β) $f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-4x+3<0$

x	$-\infty$	1		2		3		2004	$+\infty$
x^2-4x+3	+	0	-		-	0	+		+
$f'(x)$					-	0	+		

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f είναι αρνητικός στο διάστημα (2 , 3).

γ)

x	2		3		2004
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ελάχιστο

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3 την τιμή

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3+2002=9-18+9+2002=2002$$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

α)

Ηλικίες	ν_i	O_i	$O_i \cdot \nu_i$	$\bar{x}-O_i$	$(\bar{x}-O_i)^2$	$(\bar{x}-O_i)^2\cdot\nu_i$
[0 , 4)	6	2	12			
[4 , 8)	8	6	48			
[8 , 12)	10	10	100			
[12 , 16)	12	14	168			
[16 , 20)	4	18	72			
ΣΥΝΟΛΑ	**40**	**-**	**400**	**-**	**-**	

$$\bar{x}=\frac{400}{40}=10 \text{ έτη}$$

β) 10 + 12 + 4 = 26 παιδιά έχουν ηλικία τουλάχιστον 8 έτη

$\frac{26}{40}=0,65$ ή 65% ποσοστό των παιδιών είναι τουλάχιστον 8 ετών.

γ)

Ηλικίες	ν_i	O_i	$O_i \cdot \nu_i$	$\bar{x} - O_i$	$(\bar{x} - O_i)^2$	$(\bar{x} - O_i)^2 \cdot \nu_i$
[0 , 4)	6	2	12	8	64	384
[4 , 8)	8	6	48	4	16	128
[8 , 12)	10	10	100	0	0	0
[12 , 16)	12	14	168	- 4	16	192
[16 , 20)	4	18	72	- 8	64	256
ΣΥΝΟΛΑ	**40**	**-**	**400**	**-**	**-**	**960**

$$s^2 = \frac{960}{40} = 24$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{4{,}9}{10} \cdot 100\% = 49\%$$

Επειδή CV > 10% η ομάδα των παιδιών της εταιρείας δεν είναι ομοιογενής.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

α) Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως άρρητη.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 2x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2\sqrt{x}) = 2$$

$$f(1) = 2\sqrt{1} = 2$$

Επειδή $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\Re$.

β)

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(1+h)^2 + 2(1+h) + 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1 - 2h - h^2 + 2 + 2h + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-h) = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2\sqrt{1+h} - 2}{h} = 2 \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h \cdot \left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = 2 \lim_{h \to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+h}\right)^2 - 1}{h \cdot \left(\sqrt{1+h} + 1\right)}$$

$$= 2 \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = 2 \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Επειδή $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

γ) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)\,dx = -\int_0^1 x^2 dx + 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [x]_0^1 = -\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 1 - 0$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{5}{3}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4^o

α) $f\,'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(x)' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

β) Βρίσκουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

$f\,(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1-x	+	0	-
e^x	+		+
$f\,'(x)$	+	0	-
$f\,(x)$	↗	μέγιστο	↘

Η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$ την τιμή $f\,(1) = \frac{1}{e}$

Επομένως $f\,(x) \le f\,(1)$ για κάθε $x \in \Re$, δηλαδή $f\,(x) \le \frac{1}{e}$.

γ) $\int_0^1 \frac{1-x}{e^x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{e^x}\right)' dx = \left[\frac{x}{e^x}\right]_0^1 = \frac{1}{e^1} - \frac{0}{e^0} = \frac{1}{e}$.